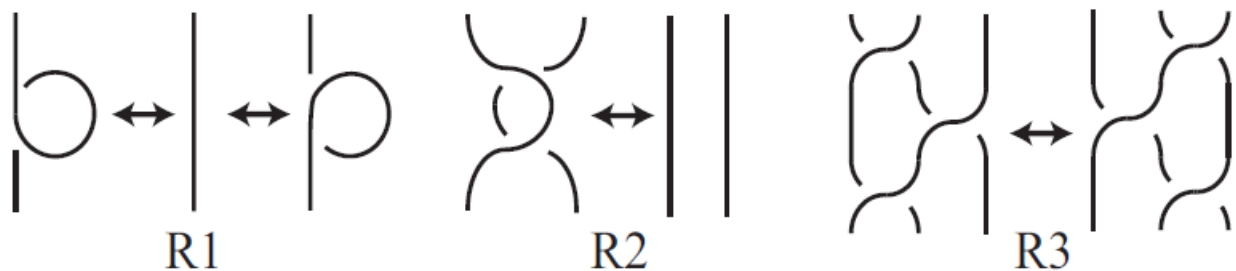


ハンドル体結び目の彩色数不変量と量子不変量の深化と統一

大阪市立大学数学研究所 専任研究員
阿部 翠空星

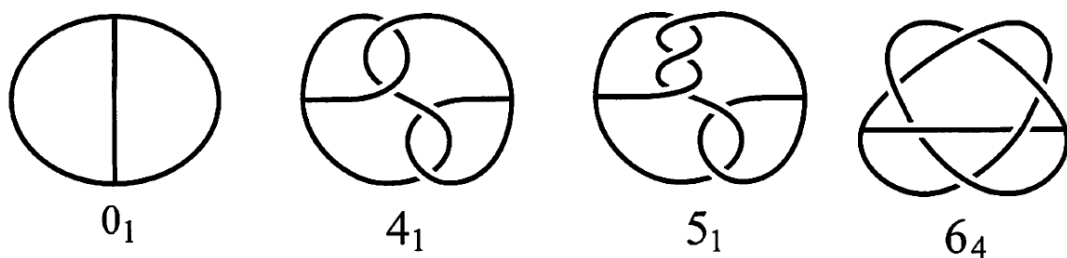
ハンドル体結び目に対して新しい不変量を定義した。この不変量にはいくつかの特徴がある。まず、絡み目の不変量を計算するため計算が簡単である。次に、これまで分類が難しかったハンドル体結び目を容易に区別できる強力な不変量である。さらに、致命的疾患であるプリオン病の治療に応用できる。

まず、ハンドル体結び目ではない通常の結び目理論の図式と不変量について説明する。結び目理論では、変形してうつりあう結び目は同じ結び目と見なす。与えられた2つの結び目が等しいことは、変形する過程を具体的に示すことにより証明できる。結び目を空間で変形するのは難しいので平面の絵を描く（交差しているところに上下の情報をつける）。これを結び目の図式という。片方の結び目の図式を次の変形 R1、R2、R3 を有限回ほどこしてもう片方の結び目の図式が得られれば2つの結び目は等しいことになる。

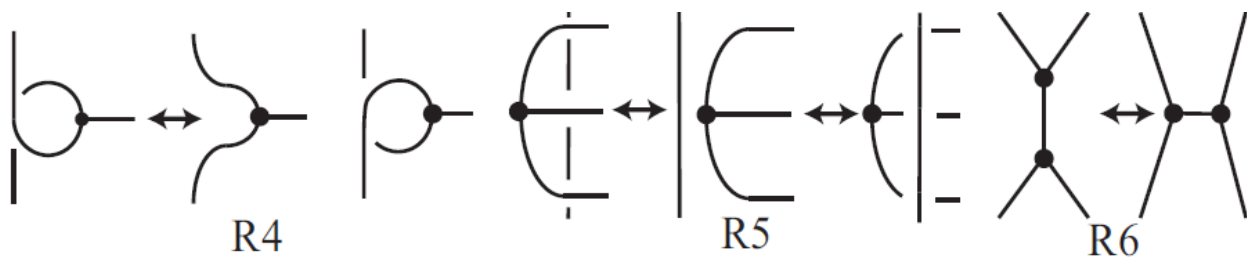


しかし、与えられた2つの結び目が異なることを証明するのは簡単ではない。そこで不変量を用いて証明する。写像 $I: \{\text{結び目の図式}\} \rightarrow \text{ある集合}$ が、結び目の図式の変形 R1、R2、R3 で変わらないとき写像 I を結び目の不変量という。不変量の値が異なれば異なる結び目であることが分かる。

次に三価頂点グラフについて述べる。三価頂点とは1つの点から3つの辺が出ているものをいう。わかりやすくするために三価頂点が2つあるものの図式を考える（正式には種数2の「ハンドル体結び目」と呼ばれている）。これらの具体例として以下のようなものがある。

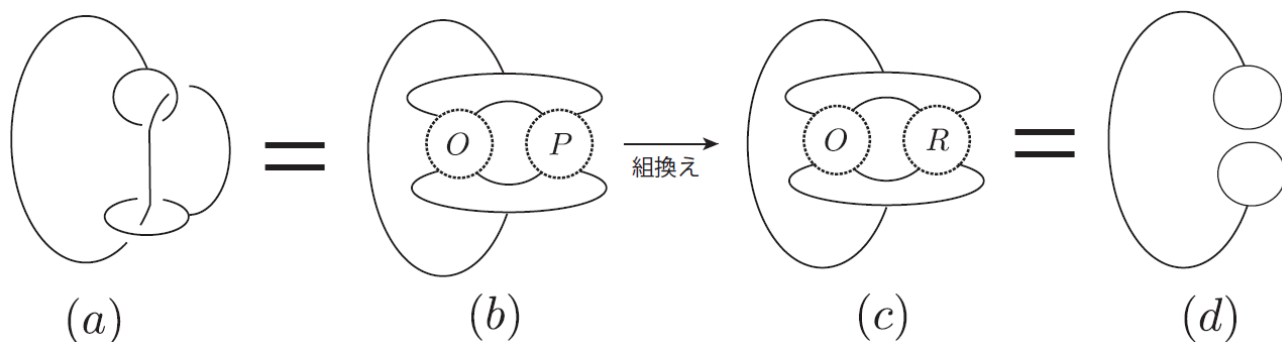


三価頂点グラフの図式では、R1、R2、R3 の変形に加えて以下の変形 R4、R5、R6 を有限回ほどこして互いにうつりあうものは等しいと見なす。



三価頂点グラフに対する新しい不変量を定義したのが本研究の成果である。この不変量には注目すべき特徴がある。第一に、三価頂点グラフから得られる2つの絡み目の不変量で定義される。第二に、不変量の値の計算が比較的簡単である。第三に、これまで判別が難しかった三価頂点グラフが分類できる（上図の5₁と6₄を判別できる）。第四に、表現論への応用がある。第五に、プリオン病への応用がある。

このプリオン病への応用は、異常型プリオン蛋白分子を正常型にする方法を数学的に与えるというものである。異常型プリオン蛋白分子は下図(a)のように絡まった空間グラフが対応し、正常型のプリオン蛋白分子は (d)のようなトポロジカルに自明な空間グラフが対応する。(a)を(d)に変形する酵素がほしい。そのためには(a)、(d)をそれぞれ(b)、(c)のような形にトポロジカルに変形したものを考える（この図において、図式の一部を *O*、*P*、*R* という記号で表している）。*P*を*R*に変える組換えを起こす酵素があれば、(b)を(c)に、すなわち(a)を(d)に変形できたことになる。



このような酵素を具体的に作り出せるか未だに解明できていないが、数学的に *P*を*R*に変える組換えには DNA トポロジーを応用していくつか候補をあげることに成功した。