

立方体地球の気象学 (part1)

目次

1	はじめに	2
2	立方体地球の導入	2
3	立方体地球の自己重力場	4
3.1	重力場に関する考察	4
3.2	万有引力の法則	5
3.3	立方体地球の重力	5
3.4	立方体地球の表面における等重力ポテンシャルの分布	7
4	立方体地球を覆う大気と海洋	10
4.1	仮定	10
4.2	海洋の存在形態	10
4.3	大気存在形態 1: 海洋が存在しない側面の大気	11
4.3.1	大気全量と地上気圧との関係	11
4.3.2	スケール・ハイト	13
4.3.3	地上気圧と気圧分布	14
4.4	大気存在形態 2: 海洋が存在する側面の大気	15
5	日射量	18
5.1	太陽光線の当たり方	18
5.2	投影面積の時間変化 1: 側面の投影面積	19
5.3	投影面積の時間変化 2: 極面の投影面積	20
5.4	投影面積の時間変化 3: 立方体地球の投影面積	21
5.5	日射の日変化と季節変化	23
5.5.1	極面における日射の季節変化	23
5.5.2	側面における日射の日変化	23
6	立方体地球の表面温度の決まり方	25
6.1	放射平衡	25
6.2	極域真空部分の地表面温度の季節変化	25
6.3	側面真空部分の地表面温度の日変化と季節変化	27
6.4	大気のみが存在する側面の気温の高度分布	27
6.5	雲の発生	31

1 はじめに

地球は、文字通り球体である。より正確に言えば、赤道半径 6378 km、極半径は 6357 km の回転楕円体である。その表面を大気と海洋が覆っている。地上気圧は、地球上のどこでも約 1 気圧である。海洋は、平均水深 3.8 km で、地球表面の 7 割を覆っている。当然のことだが、気象学や海洋学はこのような現実の条件を前提として話が展開される。

しかし、将来の地球環境を考える場合、単なる知識だけでなく、大気環境がどのような理由でこのような状態になっているのか理解しておく必要がある。すなわち、地球環境全体をシステムとして見る視点が必要である。現実の地球は、あまりに経験的な知識が多いので、地球が球であることの特徴が見えにくい。

もしも地球が球でなければ、地球環境は、現実の大気環境、海洋環境と大きく異なる世界になる。条件が異なる地球環境と、現実の地球環境を比較することにより、地球が球であることの特徴が鮮明になるであろう。

この解説では、もしも、地球が立方体であった場合の大気や海洋の現象を考察することにより、現実の地球が球体であることの特徴を明らかにしたい。

おことわり

この文章は、動画「もしも、地球が立方体だったら」の解説文章です。一部、この文章に掲載されている数値と、動画で用いられている数字とが異なる部分もありますが、それは当初、設定などが異なっていたためです。定性的な結果に違いはありませんが、不必要な混乱を招きかねないことになりましたこととお詫びいたします。

2 立方体地球の導入

立方体地球は架空の地球であるから、どのような立方体地球を導入するか、あらかじめ決められているわけではない。そこで、どのような立方体地球を設定するか、ということが問題になる。ここでは、できるだけ、実際の地球に似た大きさの立方体地球を導入することにしよう。

地球の赤道を 1 周すると、4 万 km である。そこで、一辺の長さが 1 万 km の正方形から構成される立方体の地球に着目する。立方体の体積は、10 の 12 乗立方 km である。一方、実際の地球の半径は約 6400 km であるから、体積は、

$$\frac{4}{3}\pi \times (6400 \text{ km})^3 = 1.098 \times 10^{12} \text{ km}^3$$

である。実際の地球よりもわずかに体積が小さい立方体の地球を扱うことになる。

立方体地球は現実の太陽系と全く同じ惑星の配置の中に存在していると考えられる。すなわち、立方体地球は、太陽から 1 億 5 千万 km 離れて、365 日の周期で、太陽のまわりを公転している。自転軸も、現実の地球と同じように、黄道面の垂直軸に対して 23.4 度傾いて、約 24 時間 (正確には、23 時間 56 分) の周期で自転している。

球の場合は、自転軸がどこにあっても同じようなものであるが、立方体地球の場合は、自転軸の位置によって地球環境は大きく異なる。

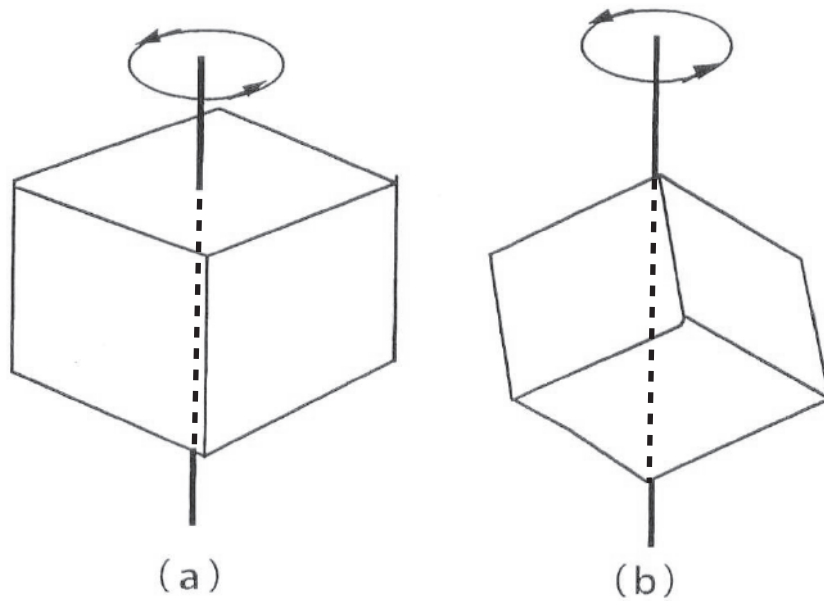


図 1: 立方体地球の自転軸 (太い縦の線) と立方体の形との位置関係。(a) は正方形の中心に極がある場合。(b) は正方形の頂点に極がある場合。

図 1 は、対称性のよい自転軸を 2 例示したものである。極が正方形の中央にあるか、正方形の頂点にあるかで、立方体地球の環境は大きく異なる。ここでは、図 1(a) のように極が正方形の中央にあると仮定する。また、立方体地球内部の密度は場所によらず一定であり、かつ、全体の質量が現実の地球の質量と同じであると仮定する。

3 立方体地球の自己重力場

3.1 重力場に関する考察

重力は、物体を地球の中心に向けて引きつける (図 2)。その大きさは地球中心からの距離による。現実の地球の場合は、図 2(a) に示すように、地球表面のどこでも、地球中心からの距離がほぼ一定なので、重力の大きさはほとんど同じである (正確には、地球は楕円体なので、緯度によって、多少異なる)。縦軸に重力の大きさをとり、横軸に、地球表面の任意の場所から表面に沿って測った距離をとると、グラフは図 3(a) のようになる。つまり地球表面上のどこでも等しい値になる。また、重力の方向は、水平面に対して真下を向く。このため、地表面に対してほぼ垂直である。

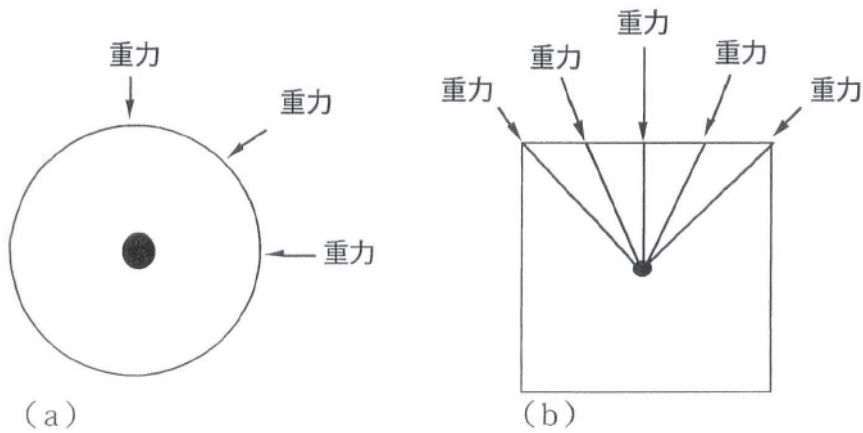


図 2: 重力が地球の中心に向けて物体を引きつけている様子 (a) 球対称な地球の場合 (b) 立方体地球の場合

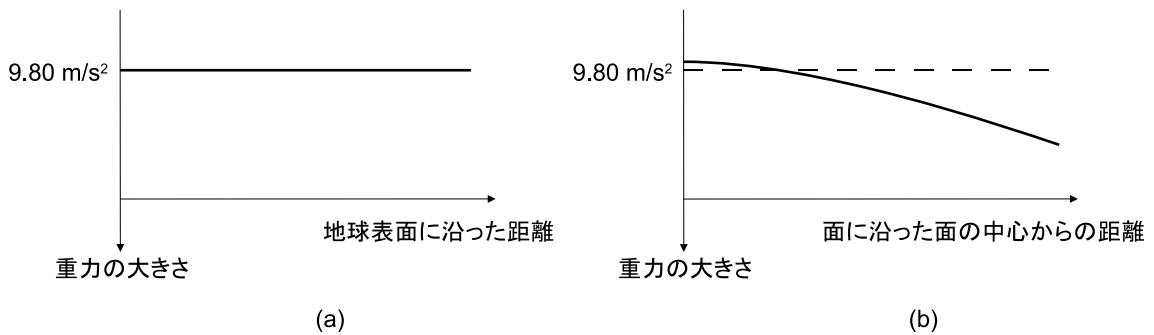


図 3: 表面における重力の大きさの分布 (a) 球対称な地球の場合 (どこでも等しい) (b) 立方体地球の場合

一方、立方体地球は、場所によって地球中心からの距離が変化するので、図 3(b) のように重力の大きさが変化する (より正確な議論は 3.3 節を参照)。また、重力の方向は、図 2(b) に示すように地表面に垂直ではない。特に、角の部分は、急峻な山岳のような感じである。富士山の山頂付近では、地表面は水平面に対して、約 30 度傾いている。葛飾北斎

の版画にある赤富士は、富士山の角度を誇張して描いている。山頂近くの角度は、53度である。それに対して、立方体地球の頂点は45度である。巨大な山岳がそそり立つような景観になるであろう。

3.2 万有引力の法則

重力は、一般に万有引力と自転に伴う遠心力の合力であるが、近似的には、万有引力であると考えるよい。

万有引力とは、質量 m と M の物質が距離 r を隔てて存在するとき、お互いに引きあう力である。その大きさ F は、

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} \quad (1)$$

で与えられる。力の単位はニュートン (N) である。ここで、 $\gamma = 6.6720 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ を万有引力定数という。この法則は1665年にイギリスの物理学者 I. ニュートンが発見した。

地球の表面に存在する物体 (例えば人間) の質量 (人間ならば体重) を m 、地球の質量を M とする。地球が球対称である場合には、万有引力は、地球の全質量が、地球の中心に集まった場合の万有引力と同じである (ガウスの法則)。そこで、地球上の物体に働く万有引力にも、地球の中心と物体との距離 r を用いることで (1) 式が適用できる。

万有引力は、物体の質量 m に比例していることが分かる。そこで、

$$g = \gamma \frac{M}{r^2} \quad (2)$$

と置けば、物体に働く万有引力は mg で与えられる。 g を重力加速度という。地球表面における g は m に依存しない定数である (図 3(a) を参照)。地球表面に於ける重力加速度は、 $r = R_E$ (地球半径 約 6400 km) とすると、約 9.80 m/s^2 である。地球表面から上空に行けば、 r が大きくなるから重力加速度は小さくなる。

慣習として、重力加速度の大きさの分布よりも、 gr の分布を問題にする。 gr を重力ポテンシャルという。 gr のグラフを描けば、その勾配 $\frac{dgr}{dr}$ が重力加速度である。

万有引力の法則は、静電気のクーロンの法則とよく似ている。重力加速度は、電場 (電界)、重力ポテンシャルは電位に対応している。等電位面に対応する重力ポテンシャルの等値面をジオイドという。地球の表面を覆う海面の形がジオイドである。

現実の地球では、手で支えた重い物体を離すと、下向きに落下する。これは地球表面のどこでも成り立つ。それは地球表面がほぼジオイドだからである。重力加速度の大きさも、海面高度では、どこでも同じような大きさである。このような性質は、地球が球であるから成り立つことである。立方体地球の場合は、表面における重力加速度の方向や大きさが場所によって大きく変化する。

3.3 立方体地球の重力

立方体地球の表面における重力を求めるには、地球を球対称と考える場合よりはるかに面倒である。地球内部の密度を ρ 、地球内部の微小な部分 (体積を $dx dy dz$ とする) が地球

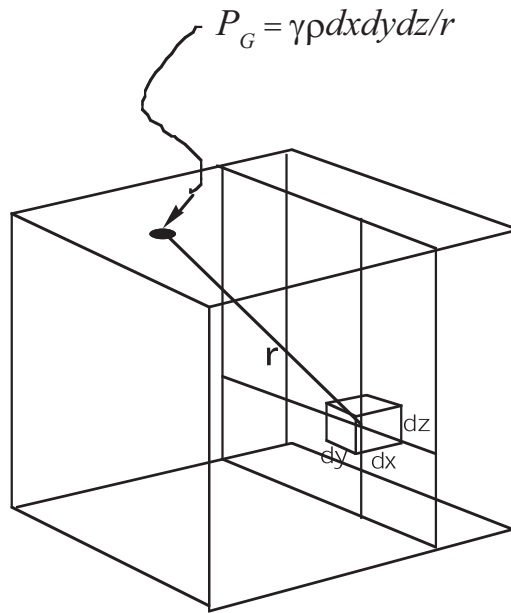


図 4: 立方体地球の重力ポテンシャルの求め方

表面の 1 点につくる重力ポテンシャルを P_G と置くととき、 P_G は、

$$P_G = \gamma \frac{\rho dx dy dz}{r} \quad (3)$$

で与えられる (図 4)。立方体地球全体の作る重力ポテンシャルは、すべての微小部分の作る重力ポテンシャルを立方体全体で寄せ集める必要がある。立方体地球の正方形の中心における重力ポテンシャルは、対称性がよいので解析的に計算できる。その結果を基に計算した重力加速度の高度分布を図 5(a) に示す。立方体地球の表面中央における重力加速度は、現実の地球よりも 5% ほど大きい。また、重力加速度は高度と共に減少する。図 5(b) は、同じグラフを両対数の目盛りでプロットしたものである。もしも、直線であれば、 r のべき乗則が成り立つことを示す。ほぼ、直線なので、近似的に、逆 2 乗の法則が成り立っていることを示している。

図 6(a) は、立方体地球のひとつの面に沿った重力ポテンシャルの分布を、正確な数値計算によって描いたものである。中心部で重力ポテンシャルがもっとも大きく、周辺部にいくに従って、小さくなることを示している。これは、重力の向きが正方形の面に垂直ではないことの現れである。また、もしも、重力ポテンシャルが、現実の地球と同じように球対称であれば、等重力ポテンシャル線は円形になるはずである。結果は、円形から多少歪んでいる。その歪みが立方体であることの効果である。しかし、近似的には、円形と置いてよいであろう。すなわち、重力の分布は、現実の地球の場合ときわめて似ている。図 6(b) は、立方体地球を辺の中央を通るように 2 等分した断面の 1/4 の部分について、等重力ポテンシャル線を描いたものである。この図でも、重力ポテンシャルは、ほぼ、球状に分布していることが分かる。そこで、重力の分布は、近似的に現実の地球の場合と同じであると考えことにしよう。

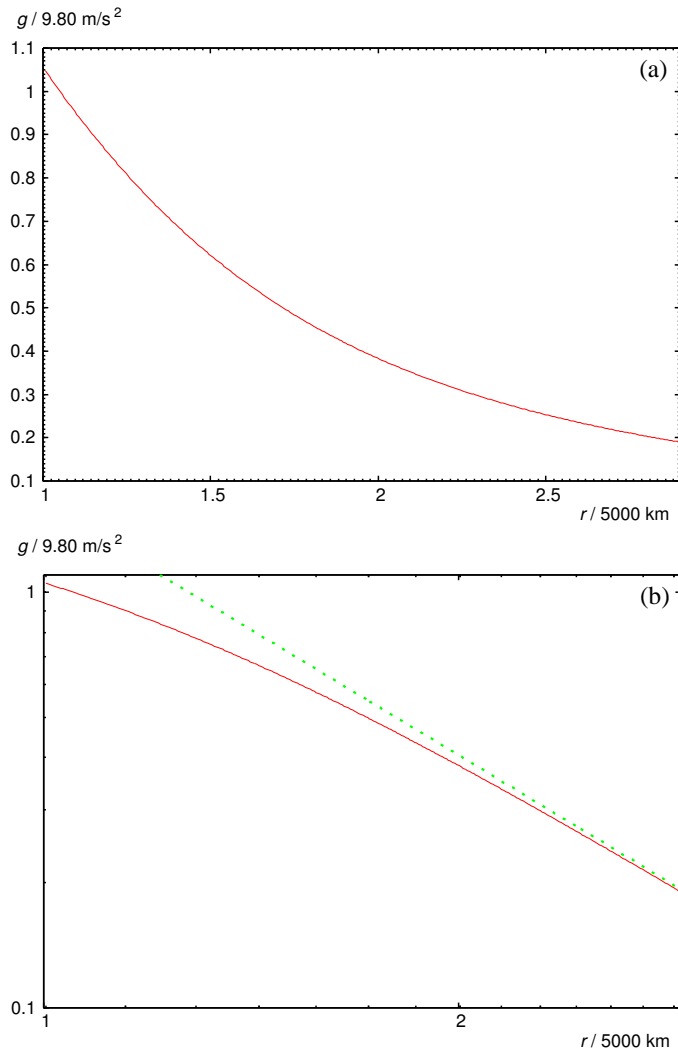


図 5: 立方体のひとつの面の中央における重力加速度の高度分布。縦軸は 9.80 m/s^2 を 1 とし、横軸は 5000 km (中心から正方形の中央までの距離) を 1 とした。(a) は、通常の見盛りでプロットしたもの。(b) は、同じグラフを両対数見盛りでプロットしたもの。逆 2 乗の法則が近似的に成り立っている。

3.4 立方体地球の表面における等重力ポテンシャルの分布

私たちにとって、ジオイドは水平面である。すなわち、現実の地球の表面は球面であるが、私たちはその表面を水平面と感じる。同じように、立方体地球の場合も、水平面は球面である。そのため、立方体地球の表面は、ほとんど斜面から構成されるように感じる。図 7 は、立方体地球の 2 つの断面において、特定の等重力ポテンシャル面 (地球のジオイドを想定している) に対する相対的な高度分布を示したものである。

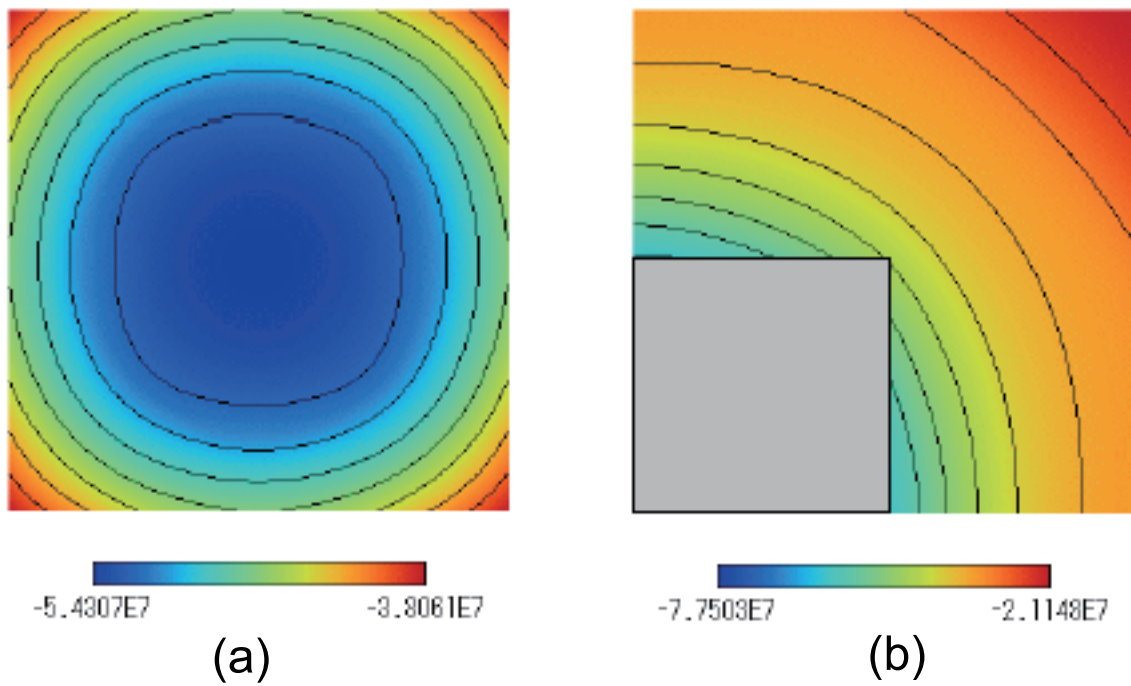
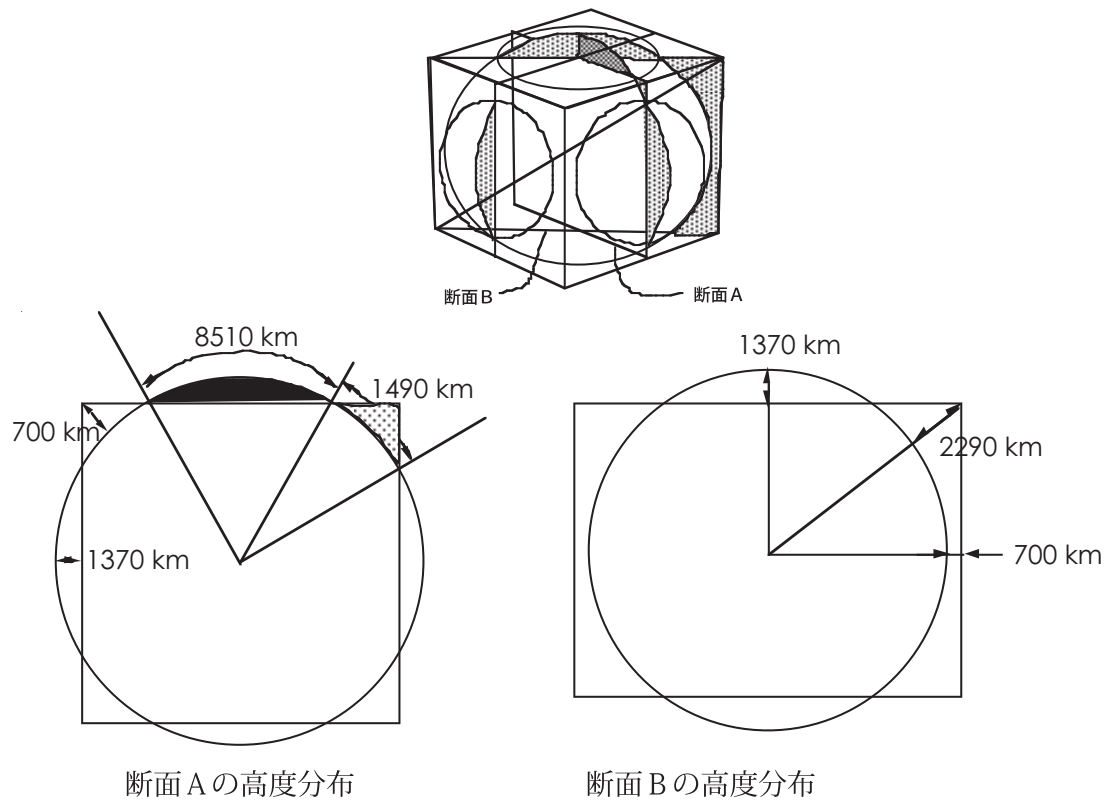


図 6: 立方体地球の重力ポテンシャル分布。数値の単位は J/kg。 (a) 正方形の表面上の分布。 (b) 立方体地球を辺の中央を通るように 2 等分した断面での分布。その 1/4 の領域を示す。灰色の部分は立方体地球内部を表している。



断面Aの高度分布

断面Bの高度分布

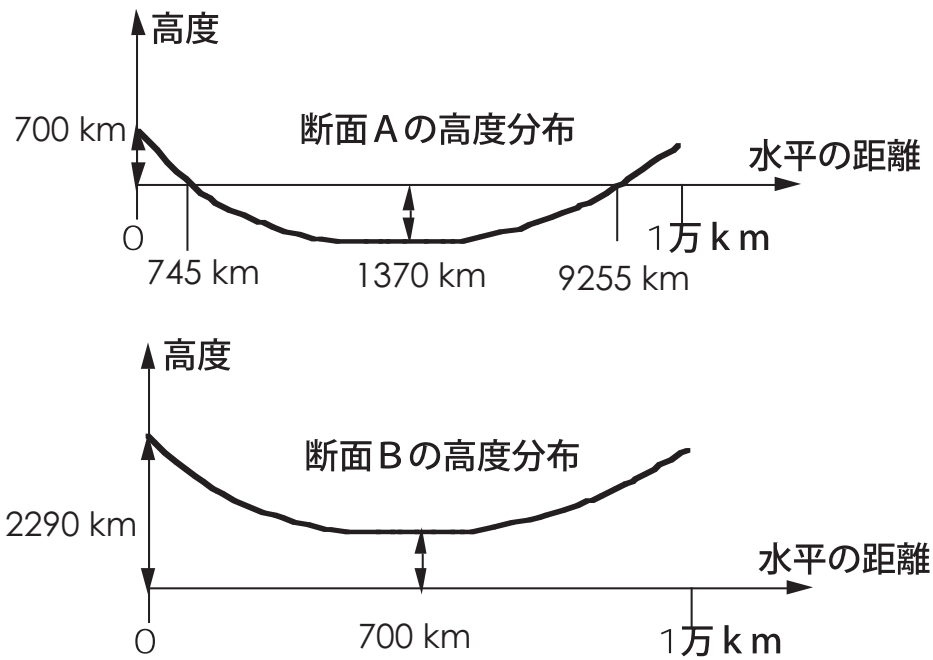


図 7: 特定の等重力ポテンシャル面 (一番上の図の球面で表されている等重力ポテンシャル面で地球のジオイドを想定したもの) に相対的な高度分布

4 立方体地球を覆う大気と海洋

4.1 仮定

大気と海洋は地球の表層を覆っている。大気は地球全体を覆っている。海水は地球表面の約7割を覆っている。地球が水惑星と呼ばれるゆえんである。

もしも、現実と同じ量(質量)の大気と海洋が立方体地球の表層に存在したとすると、どのような形で表層を覆うであろうか。以下の仮定の下に、大気と海洋の存在形態を考察する。

仮定1: 海水の全量がひとつの側面に存在する。

仮定2: 大気的全量は、6面に等分配される。

$$\begin{aligned} \text{大気の総質量} &= 5.1 \times 10^{18} \text{ kg} \\ \text{海洋の総体積} &= 1.35 \times 10^9 \text{ km}^3 \end{aligned}$$

4.2 海洋の存在形態

海水は、近似的に非圧縮流体として扱える。そこで、現実の地球と同じ体積の海水が、圧縮も膨張もされずに立方体地球にも存在すると考える。海面の形はジオイドである。ジオイドを球面で近似するので、海水は、正方形の中央部に、凸レンズ状に積もる(図8)。凸レンズの半径を L 、中心における厚さを H とするとき、体積 V は、近似的に

$$\begin{aligned} V &= \int_{R-H}^R \pi(R^2 - x^2) dx \\ &= \pi R^2 H - \frac{\pi}{3} [x^3]_{R-H}^R \\ &= \pi R^2 H - \frac{\pi}{3} (R^3 - (R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 + H^3)) \\ &= \pi \left(RH^2 + \frac{1}{3} H^3 \right) \\ V &\sim \pi RH^2 \end{aligned} \tag{4}$$

で与えられる。ただし、座標は図12(p. 16)のようにとった。 R は地球中心から(球面的一部分として近似された)海面までの距離である。

まず厚さ H について検討する。海洋の体積 $1.35 \times 10^9 \text{ km}^3$ を(4)式に代入し、第1近似として $R = 5000 \text{ km} + H$ を $R = 5000 \text{ km}$ と近似すると

$$\begin{aligned} 1.35 \times 10^9 \text{ km}^3 &= 3.14 \times 5000 \text{ km} \times H^2 \\ \rightarrow H^2 &= \frac{1.35 \times 10^9 \text{ km}^3}{3.14 \times 5000 \text{ km}} = 0.086 \times 10^6 \text{ km}^2 \\ \rightarrow H &= 0.29 \times 10^3 \text{ km} = 290 \text{ km} \end{aligned}$$

となる。次に第2近似として $R = 5290 \text{ km}$ と近似して

$$\begin{aligned} 1.35 \times 10^9 \text{ km}^3 &= 3.14 \times 5290 \text{ km} \times H^2 \\ \rightarrow H^2 &= \frac{1.35 \times 10^9 \text{ km}^3}{3.14 \times 5290 \text{ km}} = 0.081 \times 10^6 \text{ km}^2 \\ \rightarrow H &= 0.29 \times 10^3 \text{ km} = 285 \text{ km} \end{aligned}$$

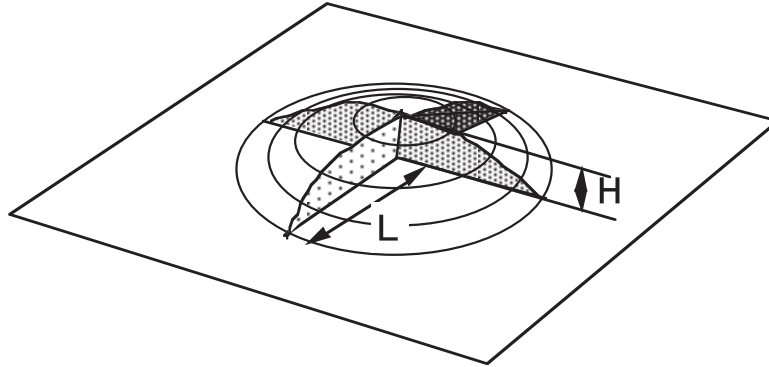


図 8: 凸レンズ状に積もる海洋

である。

次に、半径 L について検討する。

$$\begin{aligned} R^2 &= L^2 + (R - H)^2 \\ L^2 &= 2RH - H^2 \end{aligned} \quad (5)$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} L^2 &= 2 \times 5285 \text{ km} \times 285 \text{ km} - 285 \text{ km} \times 285 \text{ km} \\ \rightarrow L &= \sqrt{2931225} \text{ km} = 1712 \text{ km} \end{aligned}$$

を得る。図 9 に海洋の断面図を示す。側面の面積に対する海洋の面積比は、

$$\pi \times 1712^2 / 10000^2 = 0.092$$

である。一側面の 9.2 % を覆うだけである。

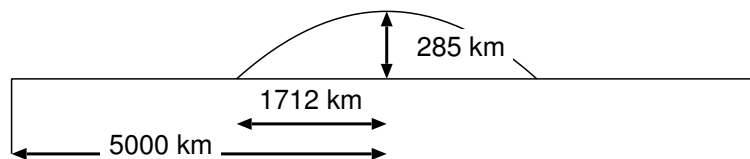


図 9: 海洋の断面図

4.3 大気存在形態 1 : 海洋が存在しない側面の大気

4.3.1 大気全量と地上気圧との関係

水銀柱に換算して考える。水銀の全量 (水銀の密度を掛ければ、大気的全質量になる) を V_m 、地球の半径を $R_E = 6400 \text{ km}$ とすれば、

$$V_m = 0.76 \text{ m} \times 4\pi R_E^2$$

$$\begin{aligned}
&= 0.76 \text{ m} \times 4 \times 3.14 \times (6400000 \text{ m})^2 \\
&= 3.91 \times 10^{14} \text{ m}^3
\end{aligned}$$

である。大気は、立方体地球の各面に等分配するとして、一面に積もる大気は、

$$\frac{1}{6}V_m = 6.52 \times 10^{13} \text{ m}^3 \quad (6)$$

となる。

海洋の存在しない側面に、大気がどのように積もるか考察する。大気も海水と同じく凸レンズ状に積もるが、積もり方を考察するために、図 10 のように、正方形の中心を原点とし、縦軸 z を鉛直上向き（重力の逆向き）に、横軸 x を縦軸の方向とは垂直な方向にとった座標系で考える。このような座標系では、地表面は $z = 0$ で定義される面とは異なるので注意が必要である。

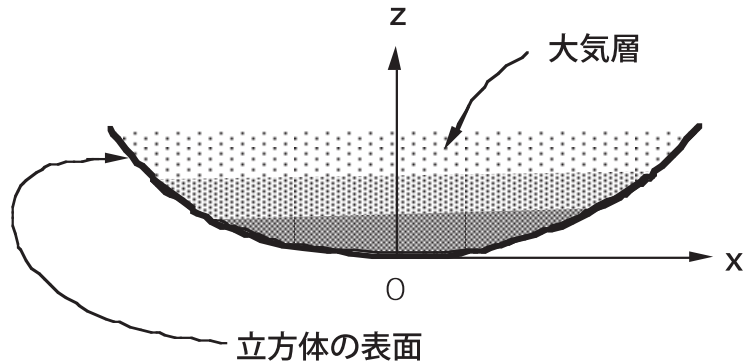


図 10: 大気層の積もり方を考えるための座標系。重力の作用する方向に z 軸をとる。

z 軸に沿った気圧の高度分布を

$$h(z) = h_0 \exp\left(-\frac{z}{H_a}\right) \quad (7)$$

と書く。気圧は水銀柱の高さ $h(z)$ で表す。(7) 式で、 $h_0 = h(0)$ であり、大気のもっとも深く積もった場所の地上気圧に相当する。また、 H_a はスケール・ハイトと呼ばれる定数（長さの次元をもつ）である。 H_a については次節で説明する。気圧は、高度と共に指数関数的に減少するので、このような式で表すのである。大気の全量を与えて、 h_0 を求めることを考える。そのためには、正方形の表面に沿った地上気圧を積分すればよい。図 10 において、地面の高度を $x(z)$ をすれば、 x は、球面上にあるから、

$$x^2 + (R - z)^2 = R^2 \quad (8)$$

が成り立つ。ここで、 R は球の半径である。これから、近似的に

$$z = \frac{x^2}{2R} \quad (9)$$

を得る。球面を原点付近で放物面で近似したことになる。これを式 (7) に代入すれば、地上気圧が求まる。すなわち、

$$h(x) = h_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2RH_a}\right) \quad (10)$$

を得る。ひとつの側面に積もる空気の全量は、地上気圧を面全体で積分したものである。放物面は、原点から離れると近似が悪くなるが、原点から離れると、気圧も低くなるので、積分の寄与が小さくなる。そこで、放物面で積分してもよい近似になることが期待できる。同じ理由で、積分の範囲を無限大にもっていてもかまわない。そこで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}V_m &= \int_0^\infty h(x) 2\pi x dx \\ &= 2\pi h_0 \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x^2}{2RH_a}\right) dx \\ &= 2\pi h_0 \left[-RH_a \exp\left(-\frac{x^2}{2RH_a}\right)\right]_0^\infty \\ &= 2\pi h_0 RH_a \end{aligned} \quad (11)$$

が得られる。 h_0 (面の中心での地上気圧) は H_a によることが分かる。

4.3.2 スケール・ハイト

大気の厚さを代表するスケール・ハイト H_a は、静力学平衡の式

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (12)$$

と気体の状態方程式

$$p = \rho R_g T \quad (13)$$

から求まる。ここで、 ρ は高度 z における空気の密度である。 R_g は気体定数、 T は気温 (単位は K) である。 T が高度によらず一定の場合、結果は、

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g}{R_g T} z\right) \quad (14)$$

である。この式からスケール・ハイトが

$$H_a = \frac{R_g T}{g} \quad (15)$$

であることが分かる。 $R_g = 287 \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$ 、 $T = 300 \text{ K}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ を代入して、

$$H_a = \frac{287 \text{ m}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1} \times 300 \text{ K}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 8786 \text{ m} \quad (16)$$

を得る。なお、スケール・ハイトとは、気圧が地上気圧の $\frac{1}{e}$ ($\simeq 0.368$) になる高度を意味する。立方体地球の気温分布はこの段階で未知であるから $T = 300 \text{ K}$ にする根拠はない。暫定的にこの値を使うことにする。

4.3.3 地上気圧と気圧分布

スケール・ハイト H_a が与えられると地上気圧 (h_0) を見積もることができる。(11) 式より、

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{V_m}{12\pi R H_a} \\ &= \frac{3.91 \times 10^{14} \text{ m}^3}{12\pi \times 5.285 \times 10^6 \text{ m} \times 8786 \text{ m}} = 223 \text{ m} \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。従って、大気的最深部では、水銀柱に換算して、223 m の大気が積もることになる。気圧にすれば、294 気圧である。

気圧の高度分布は、

$$\begin{aligned} p(z) &= 294 \exp\left(-\frac{z}{8786 \text{ m}}\right) \text{ 気圧} \\ \rightarrow \ln p(z) &= \ln 294 \text{ 気圧} - \frac{z}{8786 \text{ m}} \\ \rightarrow z &= 8786 \text{ m} \ln \frac{294 \text{ 気圧}}{p(z)} \end{aligned} \quad (18)$$

ということになる。

$$\begin{aligned} 1 \text{ 気圧になる高度} & z = 49.9 \text{ km} \\ 0.5 \text{ 気圧になる高度} & z = 56.0 \text{ km} \\ \text{カルマン線} & z = 171 \text{ km} \end{aligned}$$

である。なお、カルマン線は、大気圧が 10^{-6} 気圧になる高度のことであり、大気圏と宇宙との境界の目安になる高度である。

次に気圧の水平分布について考える。(9) 式より、

$$\begin{aligned} 1 \text{ 気圧になる半径} & x = \sqrt{2Rz} = \sqrt{2 \times 5.285 \times 10^3 \times 49.4} \text{ km} = 726 \text{ km} \\ 0.5 \text{ 気圧になる半径} & x = \sqrt{2Rz} = \sqrt{2 \times 5.285 \times 10^3 \times 56.0} \text{ km} = 769 \text{ km} \\ \text{カルマン線の半径} & x = \sqrt{2Rz} = \sqrt{2 \times 5.285 \times 10^3 \times 171} \text{ km} = 1340 \text{ km} \end{aligned}$$

まとめると、1 気圧、0.5 気圧の高度は、それぞれ、49.9 km、56.0 km である。地上気圧がその値になる位置は、正方形の中心から、それぞれ、726 km、769 km である (図 11)。

立方体地球の大気圏の形状は、現実の地球と全く異なっていることが分かる。現実の地球では、地上気圧は海面高度で、どこでも、1 気圧である。それに対して、立方体地球の場合、正方形の中心部では、294 気圧という高圧の世界になる。そして、中心から離れるに従って気圧は低下し、中心から約 730 km 離れると 1 気圧になる。それより離れると、さらに気圧が低下する。約 770 km で 0.5 気圧になり、それより離れると、空気は希薄になる。気体は、かぎりなく希薄になるので、正方形の縁でも、多少の空気は存在するが、事実上、真空と考えてよい。私たちは、気圧が 1 気圧と 0.5 気圧の間の世界に生きることができるとすれば、立方体地球の海がない側面で人間が生存可能なのは、中心から 730 km 離れた幅 40 km ほどの円形のベルト地帯のみである。そこが、人間の存在可能域 (ハビタブル・ゾーン) である。

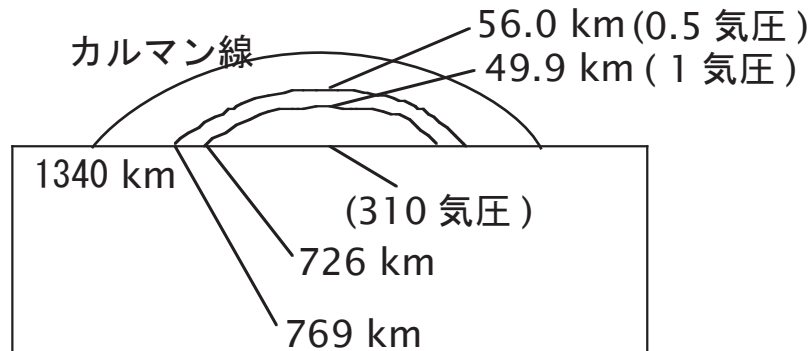


図 11: 大気の断面図

4.4 大気存在形態 2 : 海洋が存在する側面の大気

海洋が存在する側面の中心には、海洋が凸レンズ状に覆っている。大気は、その上に堆積する。海面上での圧力はどこでも同じであると考えてよい。また、陸面上に堆積する大気の質量は、海洋上の大気の質量に比べてごく小さい。そこで、大気が海洋の上だけに存在すると仮定する。

まず、図 12 に示す記号を使って海面の表面積を計算すると、

$$\text{凸レンズの表面積} = \int_0^\alpha 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = -2\pi R^2 [\cos \theta]_0^\alpha = 2\pi R^2(1 - \cos \alpha) \quad (19)$$

と表される。ここで、 $R = 5000 \text{ km} + 285 \text{ km} = 5285 \text{ km}$ 、 $\cos \alpha = 5000/5285 = 0.9461$ であるから、

$$\text{凸レンズの面積} = 2\pi \times (5285 \text{ km})^2(1 - 0.9461) = 9.46 \times 10^6 \text{ km}^2 \quad (20)$$

である。その上に積もる水銀柱の高さは、

$$\begin{aligned} h &= \text{水銀の体積} \div \text{表面積} \\ &= 6.52 \times 10^{13} \text{ m}^3 \div 9.46 \times 10^{12} \text{ m}^2 \\ &= 6.89 \text{ m} \end{aligned} \quad (21)$$

である。地上気圧に換算すれば、

$$6.89 \text{ m} \div (0.76 \text{ m/気圧}) = 9.07 \text{ 気圧} \quad (22)$$

である。そこで、気圧の高度分布は (14) 式の p_0 に 9.07 気圧を代入して、

$$\begin{aligned} p(z) &= 9.07 \exp\left(-\frac{z}{8786 \text{ m}}\right) \text{ 気圧} \\ \rightarrow \ln p(z) &= \ln 9.07 \text{ 気圧} - \frac{z}{8786 \text{ m}} \\ \rightarrow z &= 8786 \ln \frac{9.07 \text{ 気圧}}{p(z)} \text{ m} \end{aligned} \quad (23)$$

で表される。

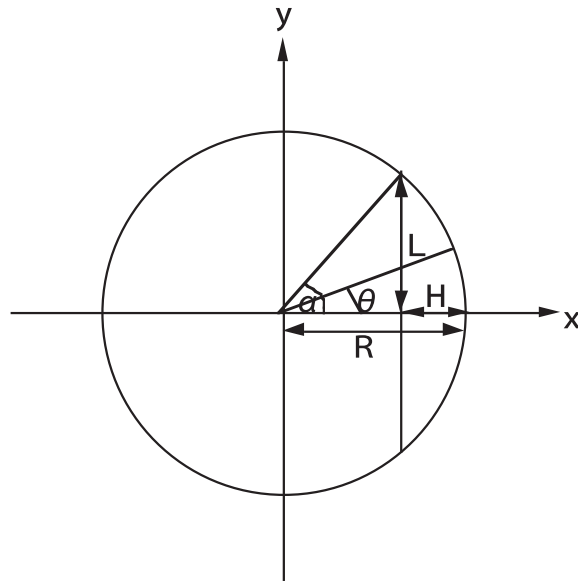


図 12: 記号の定義

1 気圧になる高度は、	$z = 8786 \times \ln \frac{9.07}{1} \text{ m} = 19.4 \text{ km}$
0.5 気圧になる高度は、	$z = 8786 \times \ln \frac{9.07}{0.5} \text{ m} = 25.5 \text{ km}$
カルマン線の高度は、	$z = 8786 \times \ln \frac{9.07}{10^{-6}} \text{ m} = 141 \text{ km}$

になる。

次に水平方向の広がりについては、

1 気圧になる海岸線からの距離は、	$x = \sqrt{(5285 + 19.4)^2 - 5000^2} \text{ km} - 1712 \text{ km} = 59.1 \text{ km}$
0.5 気圧になる海岸線からの距離は、	$x = \sqrt{(5285 + 25.5)^2 - 5000^2} \text{ km} - 1712 \text{ km} = 77.2 \text{ km}$
カルマン線の海岸線からの距離は、	$x = \sqrt{(5285 + 141)^2 - 5000^2} \text{ km} - 1712 \text{ km} = 395 \text{ km}$

となる。あるいは図 13 に示す幾何学的関係 ($x : z \simeq R : L$) から

1 気圧になる海岸線からの距離は、	$x = 19.4 \text{ km} \times R/L = 19.4 \text{ km} \times 5285 \text{ km}/1712 \text{ km} = 59.9 \text{ km}$
0.5 気圧になる海岸線からの距離は、	$x = 25.5 \text{ km} \times R/L = 25.5 \text{ km} \times 5285 \text{ km}/1712 \text{ km} = 78.7 \text{ km}$
カルマン線の海岸線からの距離は、	$x = 141 \text{ km} \times R/L = 141 \text{ km} \times 5285 \text{ km}/1712 \text{ km} = 435 \text{ km}$

となる。図 14 に、海洋と大気鉛直断面を示す。海のある側面の生存可能域は、海岸線から約 60 km 内陸部の幅約 20 km の円形のベルトである。

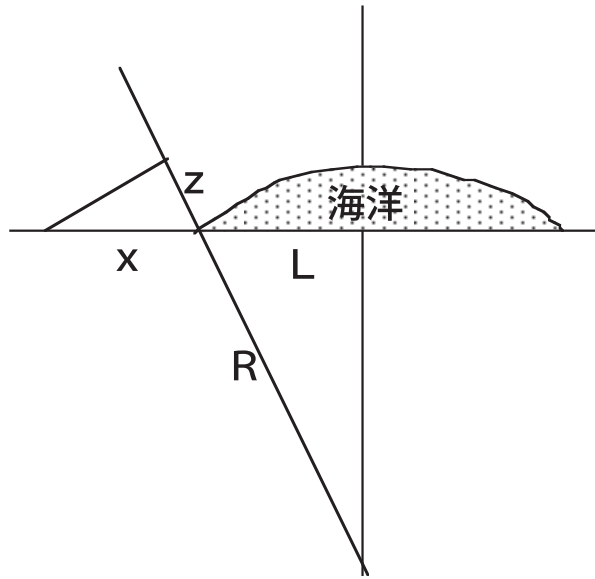


図 13: 高度と水平距離の関係

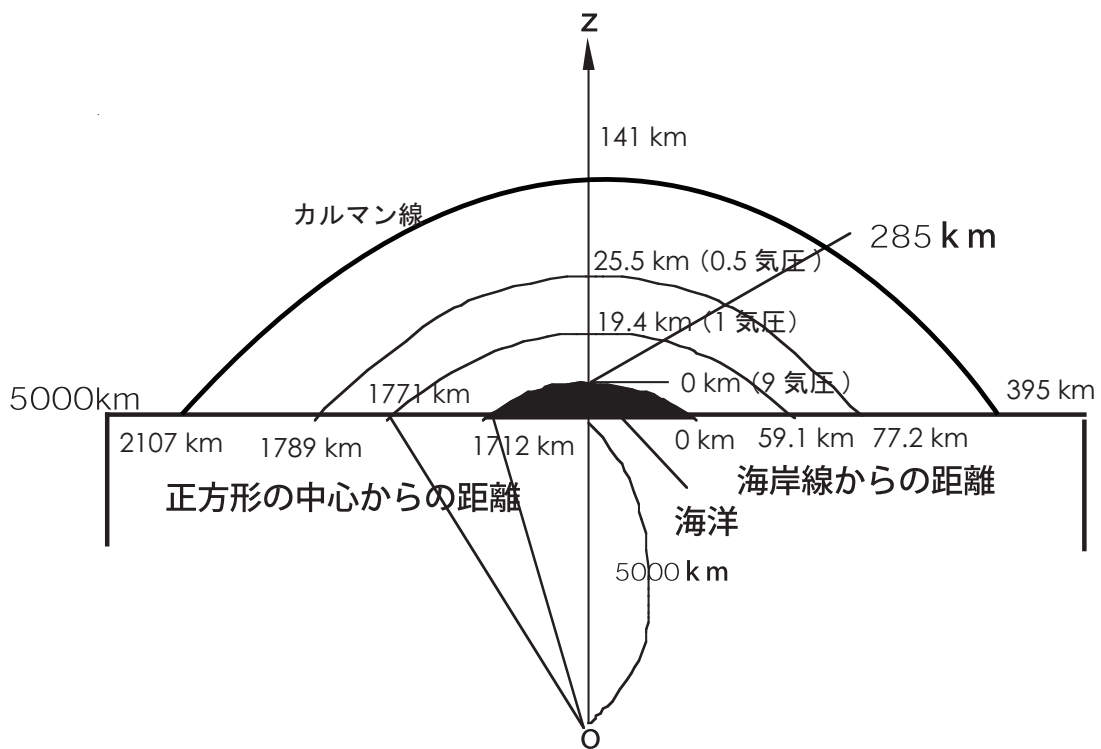


図 14: 海のある面における大気の断面

5 日射量

5.1 太陽光線の当たり方

立方体地球は、黄道面に対して、23.4度傾いて公転している(図15)。このため、太陽光線の当たり方が季節によって変化する。自転軸の方向を固定すれば、図16のように、太陽光線の来る方向が季節によって変化する。

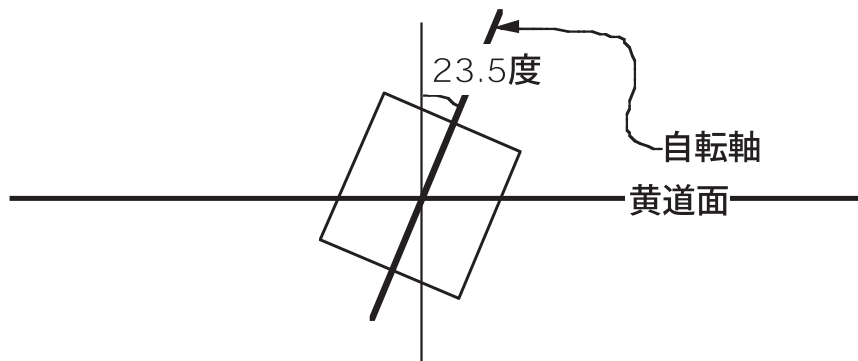


図 15: 立方体地球は、黄道面に23.4度傾いて公転している。このために季節変化が生じる。

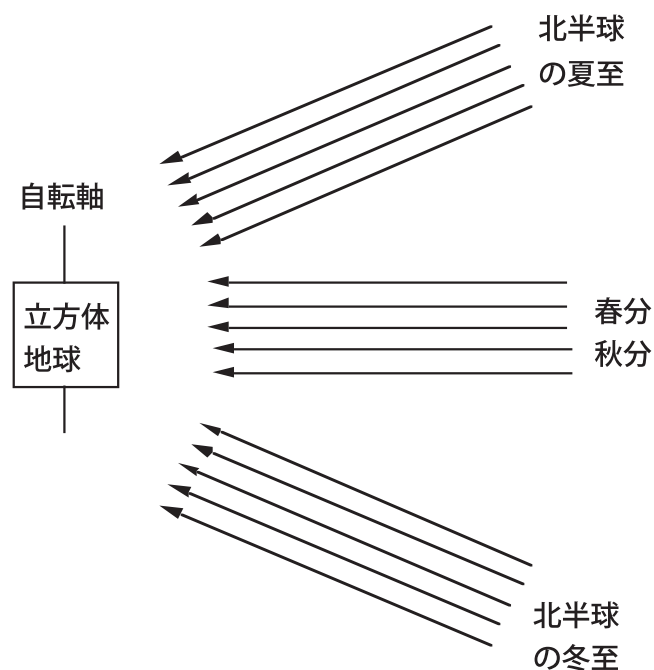


図 16: 自転軸を固定すれば、季節によって太陽光線の方向が変化する。

5.2 投影面積の時間変化 1：側面の投影面積

地球が1秒間に吸収する太陽放射エネルギーは、太陽定数 \times 地球の投影面積、で与えられる。太陽定数 S_0 は、大気圏外の単位面積 (1 m^2) に降り注ぐ太陽放射エネルギーで、 $S_0 = 1370 \text{ W/m}^2$ で与えられる。地球の投影面積とは、太陽光線に垂直に、太陽光線側から見て、地球の後にスクリーンを置いた場合、スクリーンに映る地球の影の面積である。地球が球面である場合は、季節や時刻によらず、投影面積は、 πR_E^2 で与えられる。ここで、 R_E は地球の半径である。

立方体地球の場合は、投影面積が季節や時刻によって変化する。その性質を知るためには、投影面積を求める必要がある。立方体地球全体で考える前に、立方体地球の各面の投影面積を計算する。

ひとつの側面 (極がない面) の投影面積を計算するためには、単位面積の正方形だけが宇宙に存在し、側面の中央部を自転軸にして、回転していると考え (図 17)。

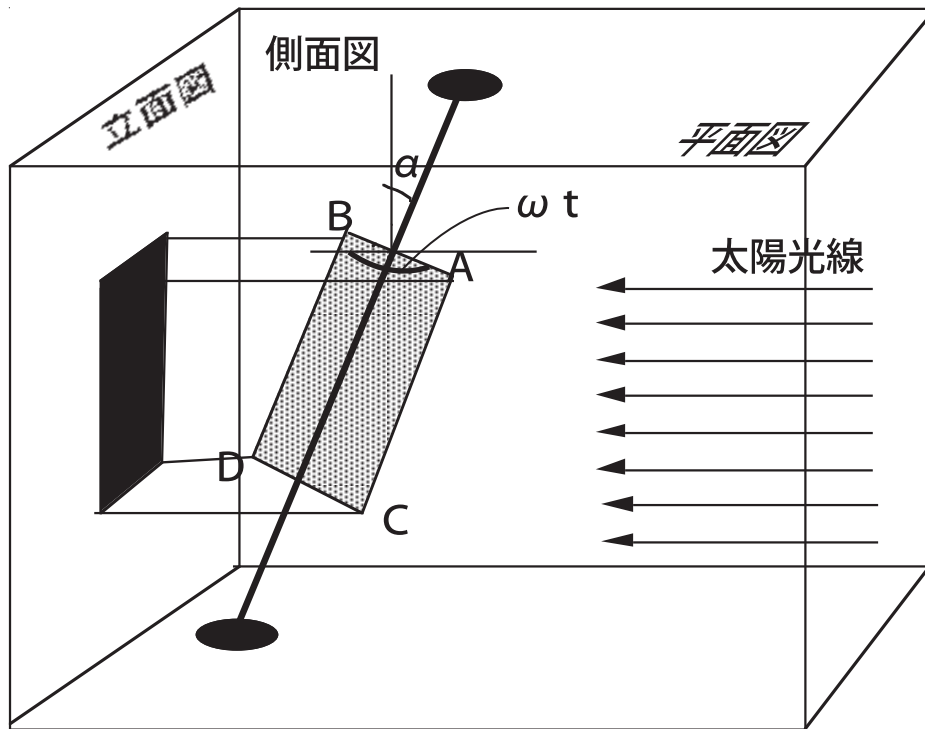


図 17: 立方体のひとつの側面 (正方形 ABCD) のみが宇宙に存在して、正方形の中央に自転軸があって、自転している状況を考える。正方形の一辺の長さは 1 とする。自転軸は、太陽光線側に角度 α だけ傾いている。また、正方形は、太陽光線に沿った方向から ωt だけ自転軸の周りを回っている。太陽光線に垂直な面を立面図、上から見た図を平面図、奥から手前を見た図を側面図とする。

日の出の時刻からの経過時間を t 、正方形の自転角速度を ω とする。図 17 に、正方形が太陽光線となす角が、 ωt の場合を示す。図 17 の立面図の影をつけた面積が正方形の投影面積である。この面積を D_0 とすると、

$$D_0 = \cos \alpha \times \sin \omega t \quad (24)$$

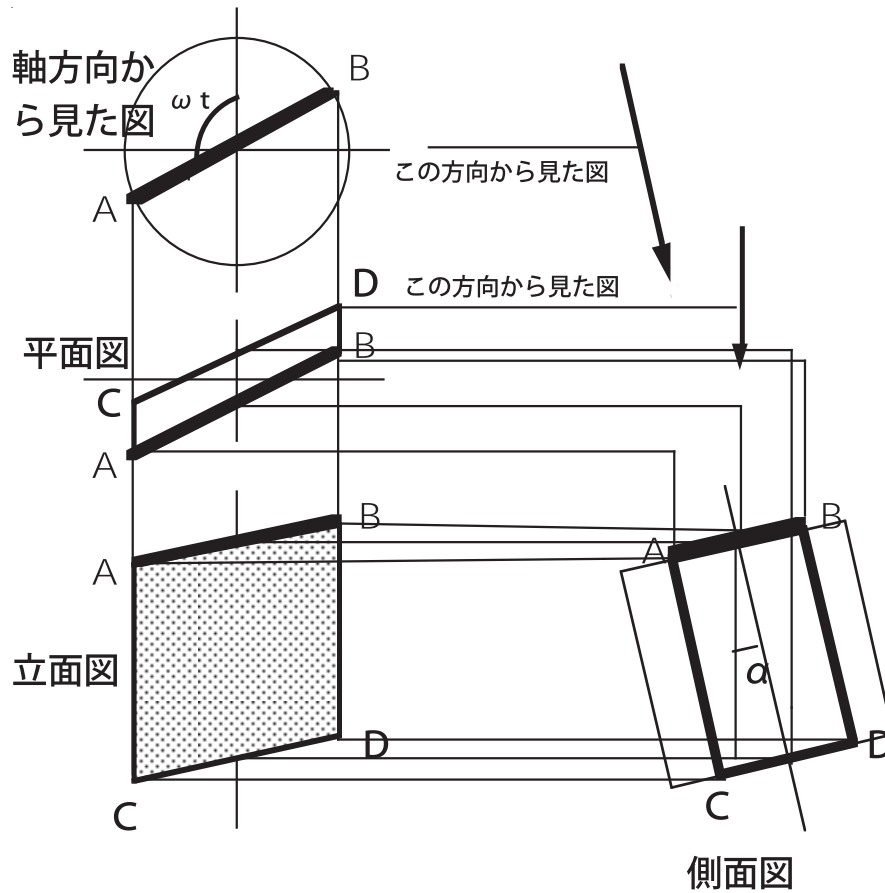


図 18: 図 17 で定義した平面図、立面図、側面図

で与えられる。一辺が 1 万 km の正方形であれば、投影面積 D は、

$$D = \cos \alpha \times \sin \omega t \times 10^8 \text{ km}^2 \quad (25)$$

であることが分かる。この面が単位面積 (1 m^2) 当たりを受ける太陽放射エネルギー S は、

$$S = S_0 \cos \alpha \times \sin \omega t \quad (26)$$

である。

5.3 投影面積の時間変化 2 : 極面の投影面積

極面 (極のある面) も自転しているので、投影される形は変化する。しかし、 α が固定されると、投影面積は ωt によらない。その理由を図 19 に示す。太陽光線の方角から見て、面積 D_0 の任意の形の投影面積 D は、図 19 から分かるように、

$$D = D_0 \sin \alpha \quad (27)$$

である。そこで、単位面積の極面の投影面積は、時間によらず (27) 式で与えられる。

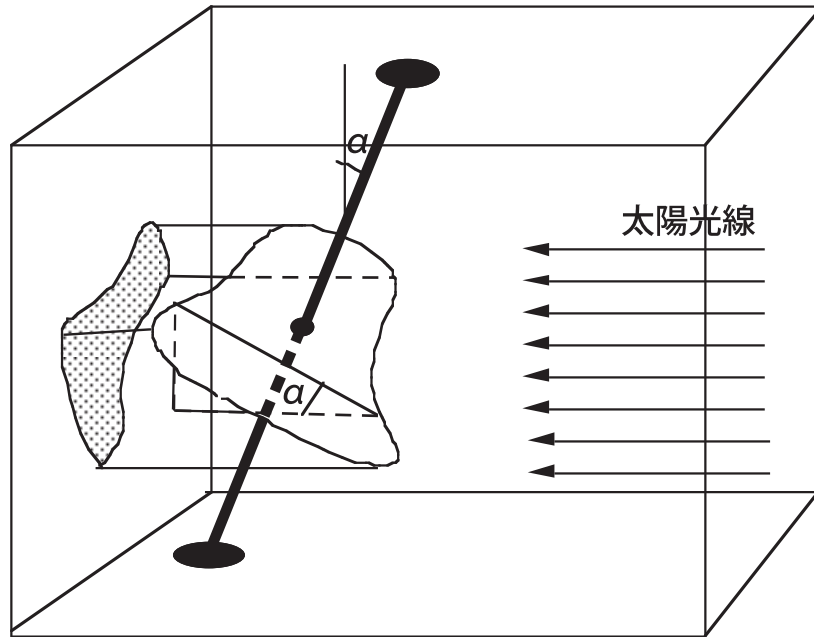


図 19: 面積 D の任意の形の図形の投影面積

5.4 投影面積の時間変化 3 : 立方体地球の投影面積

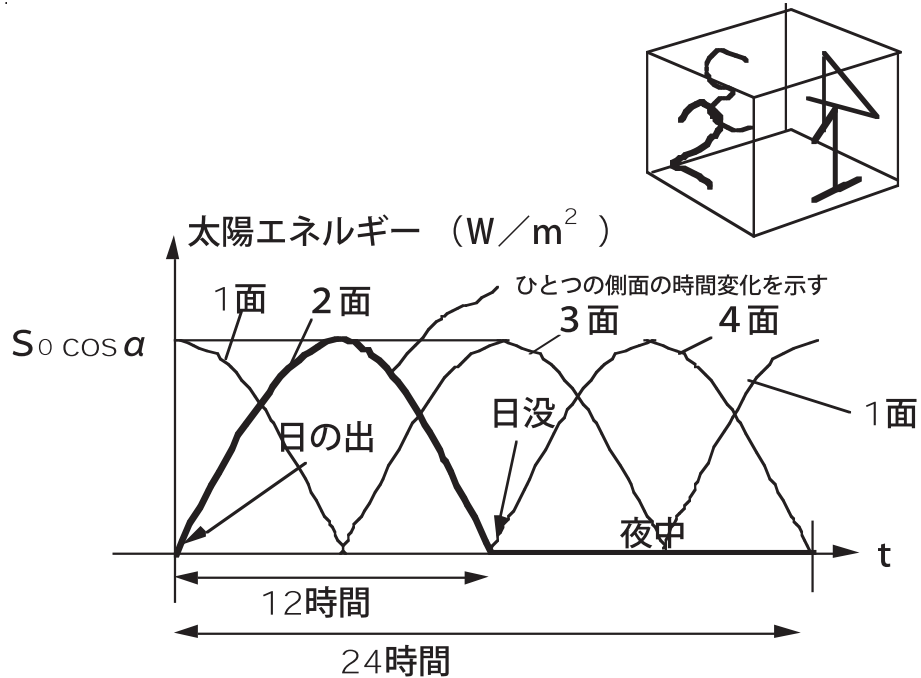


図 20: 側面の日変化。右上の立方体の側面の番号とグラフが対応する。

立方体地球には、常に、ひとつの極面と2つの側面の3面に太陽光線が当たっている。

投影面積は3面の投影面積の和であるから、それを D_{cube} とすれば、

$$\begin{aligned}
 D_{cube} &= 10^8 \text{ km}^2 \times (\sin \alpha + \cos \alpha \times \sin \omega t + \cos \alpha \times \sin(\omega t + \pi/2)) \\
 &= 10^8 \text{ km}^2 \times (\sin \alpha + \cos \alpha \times \sin \omega t + \cos \alpha \times \cos \omega t) \\
 &= 10^8 \text{ km}^2 \times (\sin \alpha + \cos \alpha (\sin \omega t + \cos \omega t)) \\
 &= 10^8 \text{ km}^2 \times (\sin \alpha + \sqrt{2} \times \cos \alpha \times \sin(\omega t + \pi/4))
 \end{aligned} \tag{28}$$

を得る (図 20)。

側面の投影面積に対応する第2項は、図 21 のように変化する。24時間の平均の面積は、

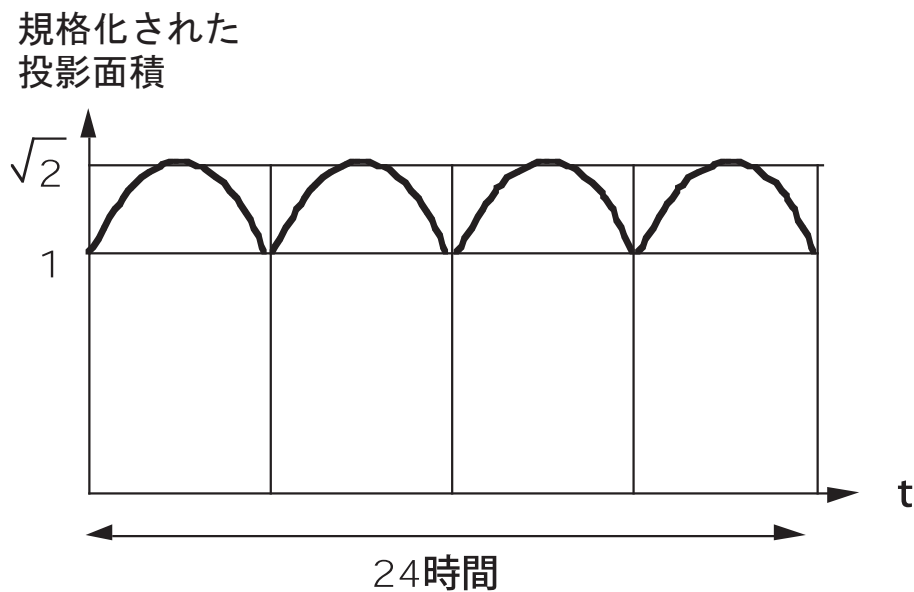


図 21: 側面の投影面積の時間変化。 $\cos \alpha$ と 10^8 km^2 で割って規格化してある。

$$\begin{aligned}
 &\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) d\theta \\
 &= \frac{4}{\pi} \sqrt{2} \left[-\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\pi/4} \\
 &= \frac{4}{\pi} \sqrt{2} \left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{4}{\pi} = 1.273
 \end{aligned} \tag{29}$$

で与えられる。従って、1日平均した投影面積は、

$$D_{cube}(\text{1日平均}) = 10^8 \text{ km}^2 \times (\sin \alpha + 1.273 \times \cos \alpha) \tag{30}$$

で与えられる。

投影面積を冬至 ($\alpha = 23.4$ 度) と春分 ($\alpha = 0$ 度) で比較してみよう。

$$\text{冬至の投影面積} = 10^8 \text{ km}^2 \times (\sin 23.4 \text{ 度} + 1.273 \times \cos 23.4 \text{ 度})$$

$$= 10^8 \text{ km}^2 \times (0.40 + 1.273 \times 0.92) = 1.57 \times 10^8 \text{ km}^2$$

$$\text{春分の投影面積} = 1.27 \times 10^8 \text{ km}^2$$

この2つの値の平均を取れば、立方体地球の投影面積の1年平均に近くなるであろう。すなわち、近似的に、

$$\text{一年平均の投影面積} = 1.42 \times 10^8 \text{ km}^2$$

である。一方、地球が半径 $R_E = 6400 \text{ km}$ の球である場合の投影面積は、

$$\pi R_E^2 = \pi \times 0.64^2 \times 10^8 \text{ km}^2 = 1.29 \times 10^8 \text{ km}^2$$

であるから、投影面積は、立方体地球の春分の投影面積にほぼ等しい。一年平均すると立方体地球の投影面積のほうが大きくなる。

5.5 日射の日変化と季節変化

5.5.1 極面における日射の季節変化

大気圏は、太陽から降り注ぐ日射によって温められている。地軸が傾いているために、季節の変化が生じる。図16のように、地軸を固定して考えると、日射の方向が季節によって変化することになる。球面と異なり、立方体地球の場合、極面と側面とでは、日射の当たり方が全く違う点に特徴がある。

極面では、12時間で交代する昼と夜がない。半年が昼間で、半年が夜間である。日射量の1年間の変化をグラフで表すと、図22のようになる。

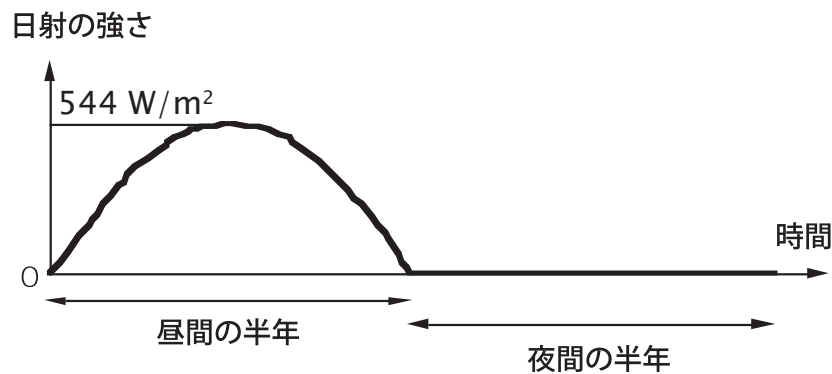


図 22: 極面における日射量の季節変化

5.5.2 側面における日射の日変化

一方、側面は、12時間で交代する昼と夜がある。球の地球では、季節によって、昼の時間が変化するが、立方体地球の場合は、季節に拘わらず、また、緯度に拘わらず、昼は12時間、夜も12時間である。図23に示すように、1日のうちに、日射量に変化する。図中の

S_{max} (最大日射量)は、季節によって変化する。春分、秋分の日に最大で、 $S_{max} = S_0 = 1370$ W/m^2 である。1日で平均すると、 436 W/m^2 で、極面の最大値より小さくなる。最小値は夏至または冬至の日で、 400 W/m^2 である。側面には、1年平均すると、 418 W/m^2 の

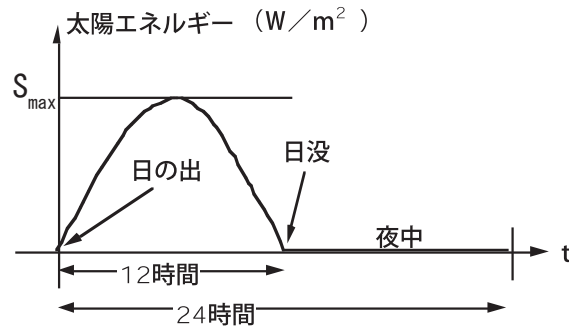


図 23: 側面における日射の日変化

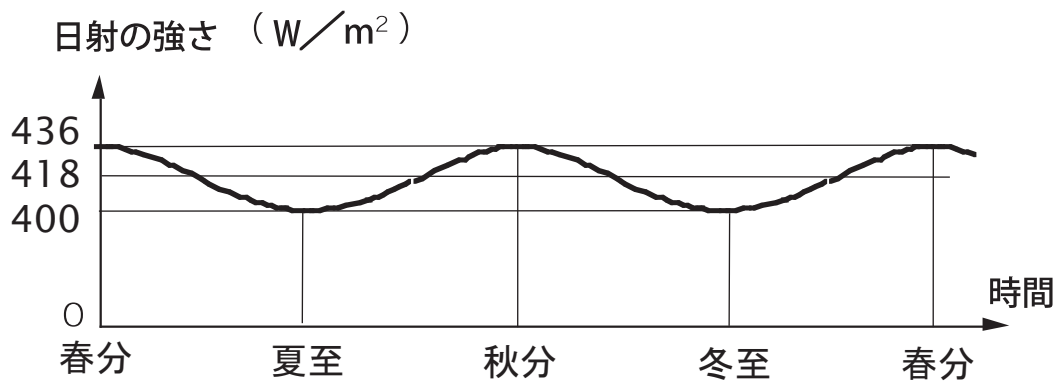


図 24: 側面における 1 日平均日射量の季節変化

日射が降り注ぐ。図 24 に示すように、日平均日射量の季節変化は小さい。

6 立方体地球の表面温度の決まり方

6.1 放射平衡

日射量が与えられたとき、それに応じて、温度はどのように定まるのであろうか。

それは、エネルギー保存則によって定まる。日射はエネルギーを持っている。そのエネルギーは、物体に吸収されると熱エネルギーに転化して、物体の温度を上げる。日だまりにいとポカポカと暖くなるのはそのためである。赤外線ストーブで温くなるのも同じ原理である。

もしも、物体が日射エネルギーを吸収し続けると、温度は限りなく上昇する。実際は、温度が上がると、(温度に応じて) 物体から赤外線が放射され、エネルギーが逃げる。この現象を「熱放射」という。1秒間に物体が吸収する日射エネルギー量と、1秒間に物体から逃げる熱放射エネルギー量が同じになると、それ以上、温度は上昇しない。その状態を「放射平衡状態」という。実は、物体の温度は、放射平衡状態の温度なのである。

それでは、立方体地球の放射平衡温度はどれほどの値になるのか。立方体地球には、真空の部分、大気が陸地に接している部分、大気が海面に接している部分がある。実際の地球には、陸地が真空の宇宙に接している部分はない。しいていえば、月面(地球の離れ座敷)がそれに当たる。立方体地球では、月面が地球の一部(母屋の一部)にやってきたようなものである。まず、空気や海洋の影響を受けない正方形の周辺部での気温を求めてみよう。

6.2 極域真空部分の地表面温度の季節変化

地表面が日射で熱せられると、地表面温度が上昇するが、地球内部との間に温度差が生じる。すると、熱は熱伝導で地球内部に染みこみ、地球内部の温度も変化する。その変化は、鉛直方向の熱伝導の式で記述される。

時間を t 、鉛直上向きに z 軸を定めるとき、熱伝導の方程式は、

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (31)$$

と書ける。ここで、 T は地中の温度、 ρc は岩石の体積熱容量、 κ は岩石の熱伝導率である。地表面温度を T_s とすれば、地表面の熱収支は、

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = S(1 - A)f(t) - \sigma T_s^4 \quad (32)$$

と書ける。ここで、 S は太陽定数、 A は立方体地球の反射率、 $f(t)$ は、太陽光線の入射角の余弦である。 σ はシュテファン・ボルツマンの定数である。

以下の定数を与えて、数値計算で、地表面温度の季節変化を求めた。

$$\begin{aligned} S &= 1370 \text{ W/m}^2 \\ A &= 0.3 \\ \kappa &= 3 \text{ W/K/m} \\ \rho c &= 2.5 \times 10^6 \text{ J/K/m}^3 \\ \sigma &= 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4 \end{aligned}$$

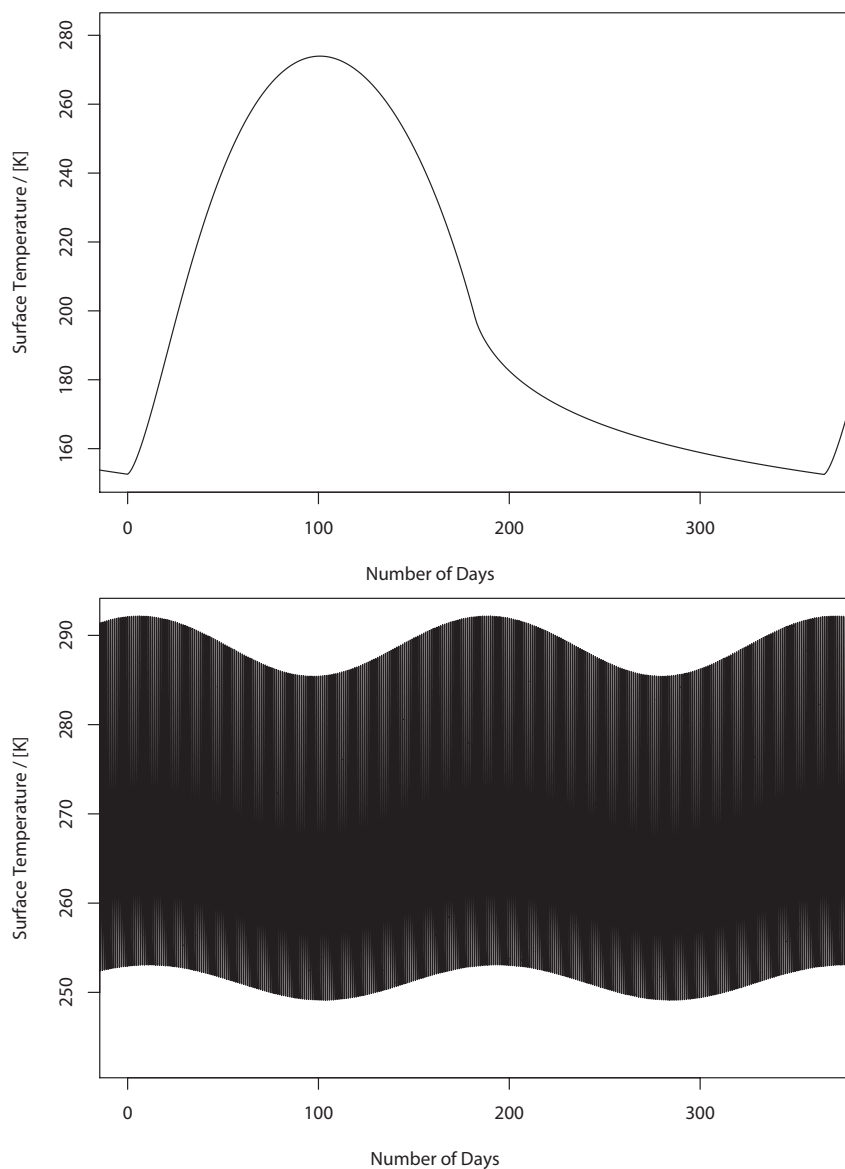


図 25: 真空部分の地表面温度の時間変化。上図：極面、下図：側面

その結果を図 25 の上図に示す。日射量の変化 (5.5 節参照) から予想されるように、極面では日変化はなく、季節変化のみ存在する。白夜の中程 (春分からほぼ 100 日目) を過ぎると、最高温度 275 K (2) に達するが、それ以降は、温度が下がり続け、極夜の終わりには、155 K (-118) まで下がる。日射がある季節は、人間の生存が可能な温度範囲にあるが、極夜になると、極寒の世界になり、とても人間が住める場所ではない。

6.3 側面真空部分の地表面温度の日変化と季節変化

同様の計算を側面の真空部分に対して行った結果を図 25 の下図に示す。現実の地球と異なり、季節は半年の周期で変化する。気温の日変化の振幅は、季節変化の振幅よりも大きい。最高気温は 290 K、最低気温は 253 K 程度であるから、側面は、一年を通じて、人間が住める温度範囲にあるといえるだろう。実際の地球の 1 年平均した放射平衡温度は、255 K(-18) であるから、それよりわずかに高い。

ここで計算した温度は、真空状態の放射平衡温度であるが、大気が薄い場所では、ほぼこの温度が実現すると考えてよい。すなわち、側面の中心から離れた場所では、かなり快適な気温が維持されることになる。側面の中心から 800 km から 1000 km の領域の気候は、実際の地球の熱帯の気候にかなり近いものになるであろう。

6.4 大気のみが存在する側面の気温の高度分布

気温は、等ジオポテンシャル面に沿って、ほぼ、一定であると考えられる。すなわち、等温面は、ドーム状に立方体地球を覆う。そこで、正方形の中心から周辺部に向かうと、気圧も気温も次第に低下する。現実の地球で高山に登山すると、気圧も気温も次第に低下するのと似ている。

図 26 は、等ジオポテンシャル面を基準にした、高度と水平距離 (正方形の中心からの距離) の関係である。立方体地球の中心から 1000 km 離れると、中心部の高度 100 km 上空と同じ高さになる。

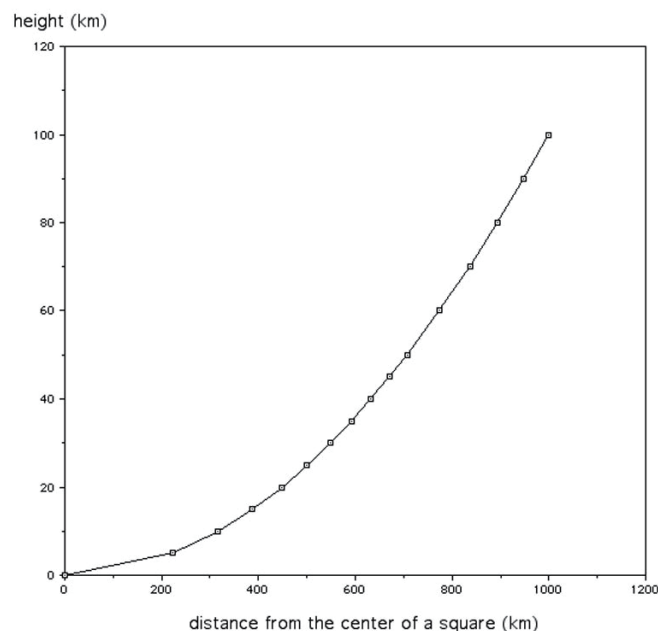


図 26: 高度と水平距離の関係

図 27 は、スケール・ハイトを 8786 m と仮定したときの、正方形の中心部における気

圧の高度分布である¹。図 28 は、地上気圧と水平距離の関係である。正方形の中心から外側に向かうと気圧が低下することを示している。この図では、気圧が 1 気圧に近い部分が分かりにくいので、図 29 に、同じグラフの拡大図を示す。中心から 700 km 離れると、1 気圧になる。

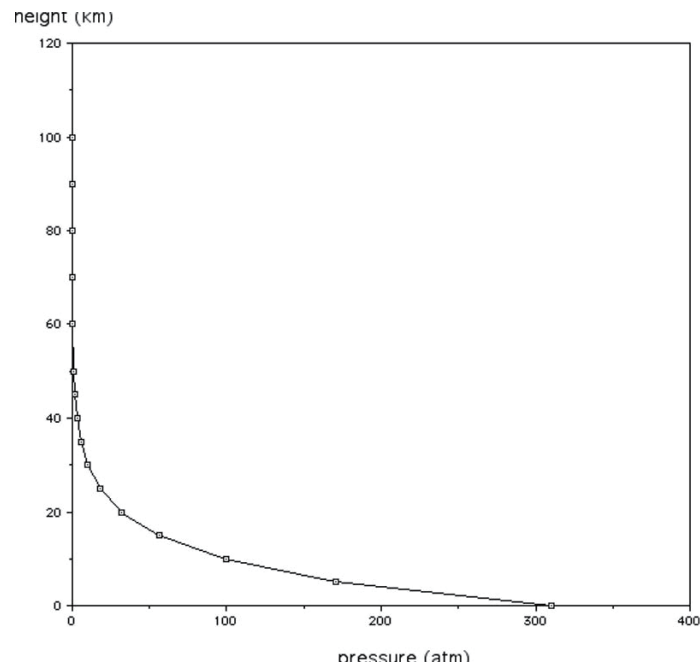


図 27: 気圧の高度分布

気温の分布は、水蒸気量によって変化する。水蒸気は現在の地球でも最も重要な温室効果気体であり、水蒸気量が温室効果の程度を決めるからである。ここでは、簡単のために次のような仮定を行い、気温の分布を計算した。

1. 灰色大気として扱えること。すなわち、熱放射のやりとりを行う温室効果気体の波長依存性は無いと仮定する。
2. 太陽光は地表だけで吸収されること。
3. 放射光線は上下 2 方向近似が成り立つこと。すなわち、水平方向の温度差や不均一は無視できるとした。
4. 放射に拘わる吸収係数は一定であること。吸収係数は本当は圧力依存性があるが、それは無視できるとした。
5. 水蒸気の空気全体に対する比率は一定であること。海のような水蒸気の供給源が無いので、このように仮定した。また、1 気圧における水蒸気量を現実の地球大気と同じと仮定した。そこで、例えば、100 気圧の大気の水蒸気量は、現実の地球大気の 100 倍となる。

¹以下では、地上気圧は 294 気圧ではなく、当初想定していた 310 気圧で計算してある。しかし、結果に定性的な違いはない。

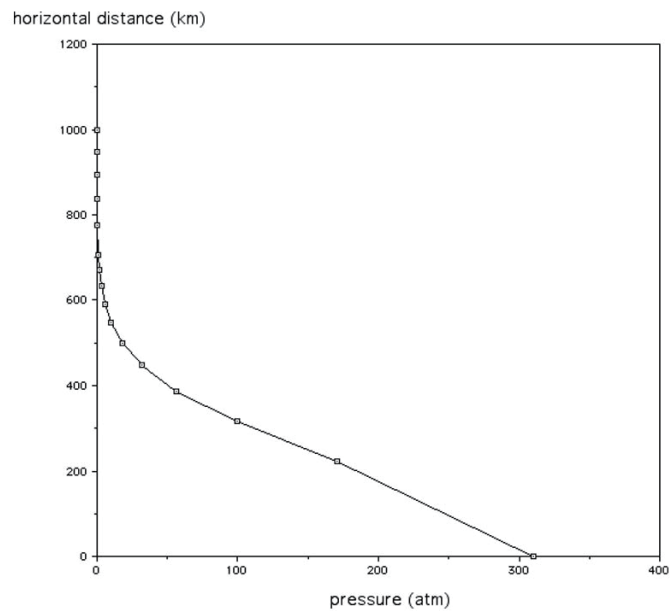


図 28: 地上気圧と水平距離との関係

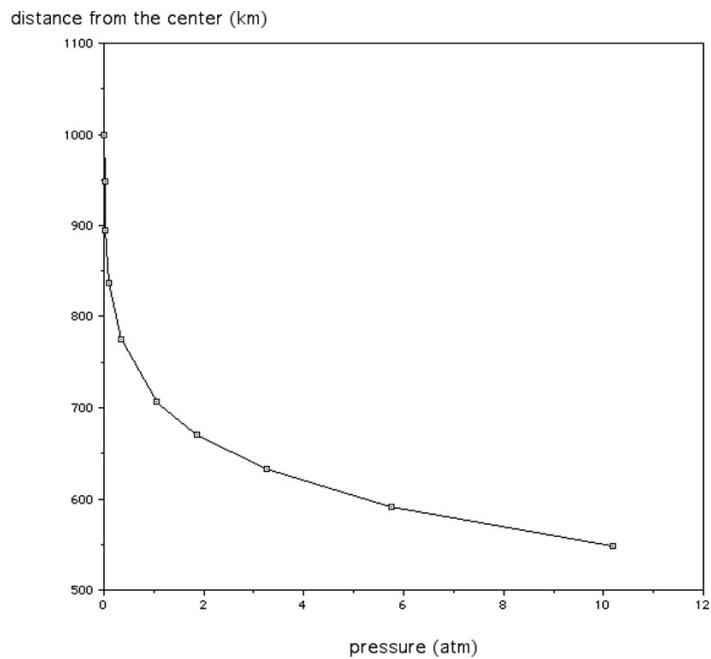


図 29: 地上気圧と水平距離との関係 (1 気圧付近の拡大図)

6. 反射率を 85 % とした。これは、後述するように大気が雲で覆われていると仮定したことによる。このときの放射平衡温度は 201 K である。

これらの仮定の下に行った計算結果を図 30 に示す。正方形の中心における地上気温は 1210 K である。気温は、上空に行くに従って、ほぼ直線的に減少する。この減り方は、乾

乾燥熱減率に近いと考えられる。下層では、8.3 K/km の気温減率である。

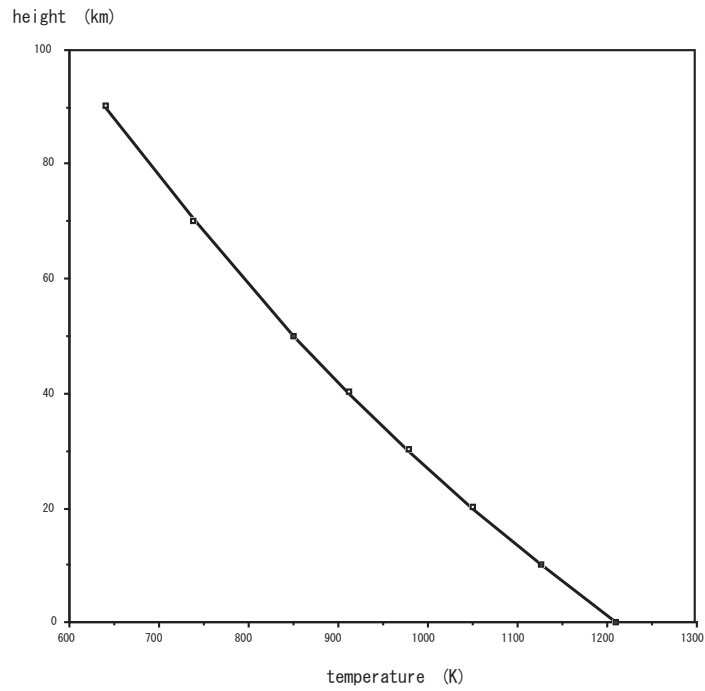


図 30: 気温の鉛直分布

図 31 は、等重力ポテンシャル面に沿って等温であると仮定して、地表面温度の分布を示したものである。地表面での等温線は、同心円になる。

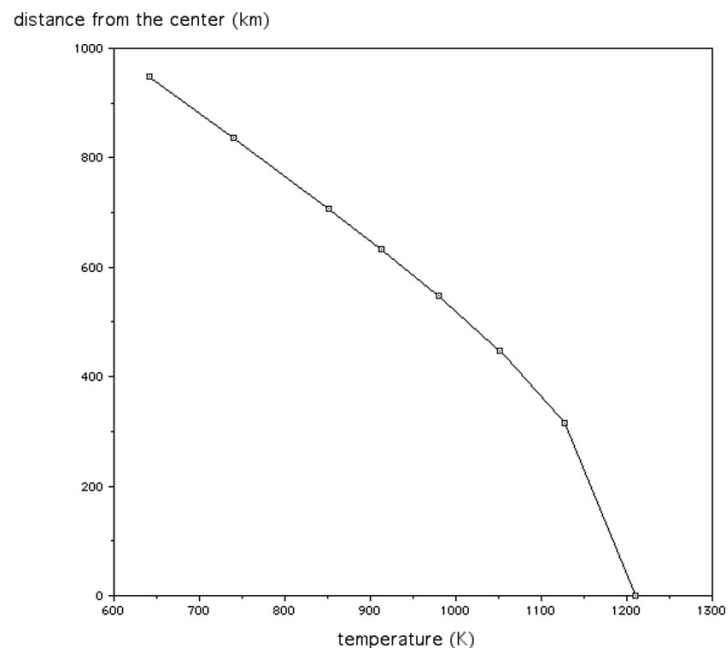


図 31: 地上気温と正方形の中心からの距離との関係

6.5 雲の発生

地球環境において、雲は大きな役割を果たしている。具体的には次のような役割である。

- 1) 雲量が反射率をコントロールする。
- 2) 温室効果に関連して気温に影響を与える。
- 3) 潜熱によって大気上層を加熱する。
- 4) 陸地に水蒸気を運び、陸地を真水で潤す。

立方体地球では、これらの効果は、どのように発現されるのであろうか。それを理解することは、実際の地球の気象を理解する上で非常に有効である。

立方体地球の大気圏では、雲が発生するだろうか。図 32 は、大気中に含まれる水蒸気量を飽和水蒸気量と比較したものである。上空にいくほど気圧が低くなるので、大気中に含まれる水蒸気量は減少する。一方、上空にいくほど気温が低くなるので、飽和水蒸気圧も減少する。その結果、高度 215 km で水蒸気が飽和する。すなわち、この高度が雲底である。この高度の気温は約 300 K である。立方体地球の大気では、雲がドーム状に覆う。正方形の中心から 1100 km ほど離れた地点で、雲底は地上になり、それより外側は、霧に覆われることになる。

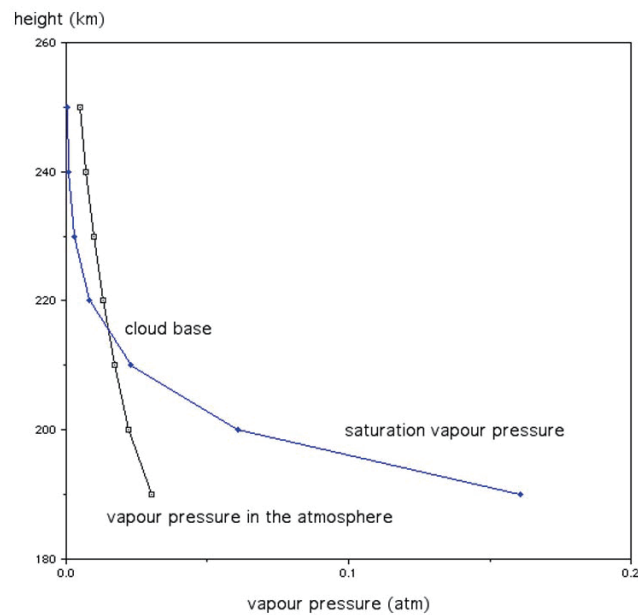


図 32: 大気中に含まれる水蒸気量 (水蒸気圧で表示) と飽和水蒸気圧の高度分布

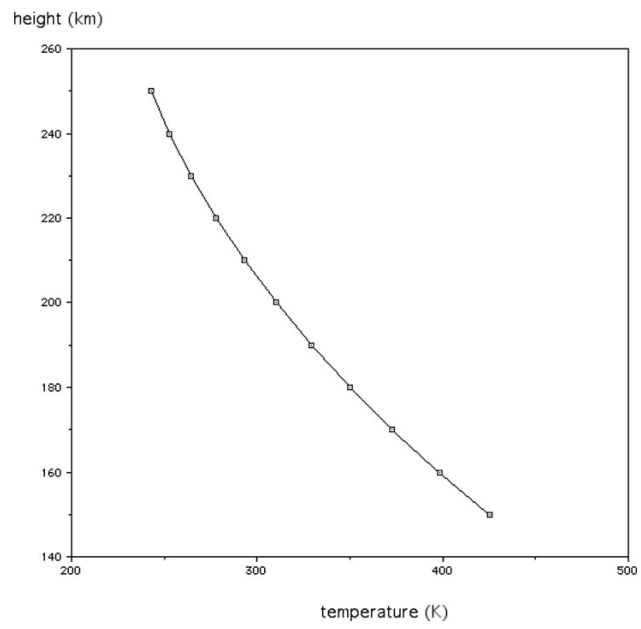


図 33: 図 32 に対応する高度範囲の気温の高度分布